Estadística Aplicada a la Investigación en Salud
Medwave. Año XI, No. 12, Diciembre 2011. Open Access, Creative Commons.

La prueba de ji-cuadrado

Autor: Fernando Quevedo Ricardi[1]
Filiación:
[1]Departamento de Educación en Ciencias de la Salud, Facultad de Medicina, Universidad de Chile
Correspondencia: fquevedo@med.uchile.cl
doi: http://dx.doi.org/10.5867/medwave.2011.12.5266

Ficha del Artículo
Citación: Quevedo F. La prueba de ji-cuadrado. *Medwave* 2011 Dic;11(12) doi: 10.5867/medwave.2011.12.5266
Fecha de envío: 10/11/2011
Fecha de aceptación: 11/11/2011
Fecha de publicación: 1/12/2011
Origen: solicitado
Tipo de revisión: sin revisión por pares

Resumen

El estadístico ji-cuadrado (o chi cuadrado), que tiene distribución de probabilidad del mismo nombre, sirve para someter a prueba hipótesis referidas a distribuciones de frecuencias. En términos generales, esta prueba contrasta frecuencias observadas con las frecuencias esperadas de acuerdo con la hipótesis nula. En este artículo se describe el uso del estadístico ji-cuadrado para probar la asociación entre dos variables utilizando una situación hipotética y datos simulados. Luego se describe su uso para evaluar cuán buena puede resultar una distribución teórica, cuando pretende representar la distribución real de los datos de una muestra determinada. A esto se le llama evaluar la bondad de un ajuste. Probar la bondad de un ajuste es ver en qué medida se ajustan los datos observados a una distribución teórica o esperada. Para esto, se utiliza una segunda situación hipotética y datos simulados.

Abstract

Chi square analysis, with probability distribution that goes by the same name, is used to test hypotheses referred to frequency distribution. This test contrasts observed frequencies with expected frequencies according to the nil hypothesis. The article describes the use of chi square analysis to test the association between two variables using a hypothetical situation and simulated data. Next, it describes its use in assessing how well a theoretical distribution can result when it attempts to represent the real distribution of data within a given sample. This is called obtaining the goodness of fit. Estimating the goodness of fit helps to see to what extent observed data are adjusted to a theoretical or expected distribution. For this, a second hypothetical situation is used with simulated data.

Del mismo modo que los estadísticos “z”, con su distribución normal y “t”, con su distribución t de Student, nos han servido para someter a prueba hipótesis que involucran a promedios y porcentajes, el estadístico ji-cuadrado (o chi cuadrado), que tiene distribución de probabilidad del mismo nombre, nos servirá para someter a prueba hipótesis referidas a distribuciones de frecuencias.

En primer lugar usaremos el estadístico ji-cuadrado para probar la asociación entre dos variables, y luego lo usaremos para evaluar en qué medida se ajusta la distribución de frecuencias obtenida con los datos de una muestra, a una distribución teórica o esperada.

En términos generales, esta prueba contrasta frecuencias observadas con las frecuencias esperadas de acuerdo con la hipótesis nula. Al igual que en el caso de las pruebas anteriormente presentadas, ilustraremos con ejemplos.

Ji- cuadrado como prueba de asociación

Supongamos que un investigador está interesado en evaluar la asociación entre uso de cinturón de seguridad en vehículos particulares y el nivel socioeconómico del conductor del vehículo. Con este objeto se toma una muestra de conductores a quienes se clasifica en una tabla de asociación, encontrando los siguientes resultados:

Uso de cinturón	**Nivel socioeconómico bajo**	**Nivel socioeconómico medio**	**Nivel socioeconómico alto**	**TOTAL**
SI	8	15	28	51
NO	13	16	14	43
TOTAL	21	31	42	94
Uso de cinturón	Nivel socioeconómico bajo	Nivel socioeconómico medio	Nivel socioeconómico alto	TOTAL
SI	8	15	28	51
NO	13	16	14	43
TOTAL	21	31	42	94

Tabla I. Tabla de asociación, valores observados.

Permiten estos datos afirmar que el uso del cinturón de seguridad depende del nivel socioeconómico? Usaremos un nivel de significación alfa=0,05.

Los pasos del análisis estadístico en este caso son los siguientes:

1. En primer lugar se debe plantear las hipótesis que someteremos a prueba
H0: "El uso de cinturón de seguridad es independiente del nivel socioeconómico".
H1: "El uso de cinturón de seguridad depende del nivel socioeconómico".

En esta prueba estadística siempre la hipótesis nula plantea que las variables analizadas son independientes.

2. En segundo lugar, obtener (calcular) las frecuencias esperadas
Estas son las frecuencias que debieran darse si las variables fueran independientes, es decir, si fuera cierta la hipótesis nula.

Las frecuencias esperadas se obtendrán de la distribución de frecuencias del total de los casos, 51 personas de un total de 94 usan el cinturón y 43 de 94 no lo usan. Esa misma proporción se debería dar al interior de los tres grupos de nivel socioeconómico, de manera que el cálculo responde al siguiente razonamiento: si de 94 personas 51 usan cinturón; de 21 personas, ¿cuántas debieran usarlo?

La respuesta a esta pregunta se obtiene aplicando la "regla de tres" y es 11,4. Este procedimiento debe repetirse con todas las frecuencias del interior de la tabla.

El detalle de los cálculos es el siguiente:
Nivel bajo: (21x51/94)=11,4-(21x43/94)=9,6
Nivel medio: (31x51/94)=16,8-(31x43/94)=14,2
Nivel alto: (42x51/94)=22,8-(42x43/94)=19,2

Estas son las frecuencias que debieran presentarse si la hipótesis nula fuera verdadera y, por consiguiente, las variables fueran independientes.

Estos valores los anotamos en una tabla con las mismas celdas que la anterior; así tendremos una tabla con los valores observados y una tabla con los valores esperados, que anotaremos en cursiva, para identificarlos bien.

Uso de cinturón	**Nivel bajo**	**Nivel medio**	**Nivel alto**	**TOTAL**
SI	*11,4*	*16,8*	*22,8*	51
NO	*9,6*	*14,2*	*19,2*	43
TOTAL	21	31	42	94

Tabla II. Tabla de asociación, valores esperados.

3. En tercer lugar se debe calcular el estadístico de prueba
En este caso, el estadístico de prueba es Ji-cuadrado que, como dijimos al comienzo, compara las frecuencias que entregan los datos de la muestra (frecuencias observadas) con las frecuencias esperadas, y tiene la siguiente fórmula cálculo:

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

donde o_i representa a cada frecuencia observada y e_i representa a cada frecuencia esperada.

De este modo el valor del estadístico de prueba para este problema será:

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} =$$

$$\frac{(8-11{,}4)^2}{11{,}4} + \frac{(13-9{,}6)^2}{9{,}6} + \frac{(15-16{,}8)^2}{16{,}8} + \frac{(16-14{,}2)^2}{14{,}2} + \frac{(28-22{,}8)^2}{22{,}8} + \frac{(14-19{,}2)^2}{19{,}2} = 5{,}23$$

Entonces $\chi^2 = 5{,}23$ Este es el valor de nuestro estadístico de prueba que ahora, siguiendo el procedimiento de problemas anteriores (paso 4), debemos comparar con un valor de la tabla de probabilidades para ji-cuadrado ($\mathbf{X}^2$). Esta tabla es muy parecida a la tabla *t de student*, pero tiene sólo valores positivos porque ji-cuadrado sólo da resultados positivos. Véase gráfico 1, que muestra la forma de la curva, con valores desde 0 hasta infinito.

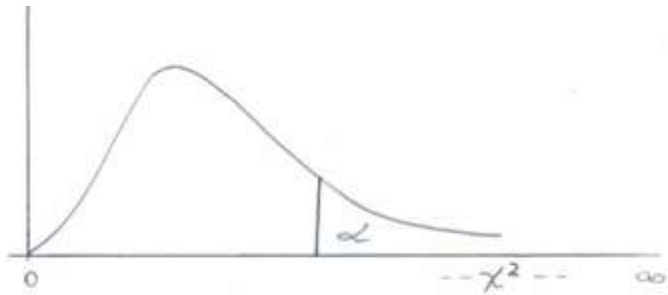


Gráfico 1.

Dado que el estadístico ji cuadrado sólo toma valores positivos, la zona de rechazo de la hipótesis nula siempre estará del lado derecho de la curva.

Uso de tabla ji-cuadrado

La tabla de ji-cuadrado tiene en la primera columna los grados de libertad y en la primera fila la probabilidad asociada a valores mayores a un determinado valor del estadístico (véase gráfico de la tabla III).

Los grados de libertad dependen del número de celdas que tiene la tabla de asociación donde están los datos del problema y su fórmula de cálculo es muy sencilla:

Grados de libertad (gl)=(nº de filas–1)x(nº de columnas–1)

Así, en nuestro ejemplo, en que hay 2 filas y 3 columnas, los grados de libertad serán:

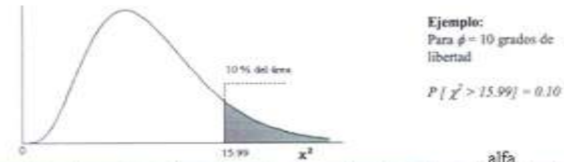
gl=(2-1)x(3-1)=2

Nótese que no se consideran la fila ni la columna de los totales.

Al comienzo elegimos un nivel de significación alfa=0,05. Entonces un valor de tabla para $\mathbf{X}^2$ asociado a 2 grados de libertad y alfa 0,05 es 5,99.

Por lo tanto, como en el gráfico 2 vemos que 5,23 se encuentra a la izquierda de 5,99, la probabilidad asociada a valores superiores a 5,23 es mayor que alfa (0,05).

Según esto, debemos aceptar la hipótesis nula que plantea que las variables "uso de cinturón de seguridad" y "nivel socioeconómico" son independientes. Limitación: como norma general, se exige que el 80% de las celdas en una tabla de asociación tengan valores esperados mayores de 5.



Grados de libertad

alfa

ϕ \ α	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75	0.5	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	α / ϕ
1	3.93E-05	1.57E-04	9.82E-04	3.93E-03	1.58E-02	0.102	0.455	1.323	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	1
2	1.00E-02	2.01E-02	5.06E-02	0.103	0.211	0.575	1.386	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	2
3	7.17E-02	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	4
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.67	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	5
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	6
7	0.989	1.239	1.690	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.3	7
8	1.344	1.647	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.53	20.1	22.0	8
9	1.735	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.7	23.6	9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.5	23.2	25.2	10
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.34	13.70	17.28	19.68	21.9	24.7	26.8	11
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.0	23.3	26.2	28.3	12
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.4	24.7	27.7	29.8	13
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.17	13.34	17.12	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	14
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.04	14.34	18.25	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	15
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34	19.37	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	16
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.79	16.34	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	17
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	13.68	17.34	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	18
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	14.56	18.34	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	19
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	15.45	19.34	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	20
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	16.34	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	21
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	17.24	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	22
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	23
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	24
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	25
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	26
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	27
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	28
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	29
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	30
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	40
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	42.9	49.3	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	50
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	60
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2	70
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	71.1	79.3	88.1	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3	80
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	80.6	89.3	98.6	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	90
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	90.1	99.3	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	100
Z_α	-2.58	-2.33	-1.96	-1.64	-1.28	-0.674	0.000	0.674	1.282	1.645	1.96	2.33	2.58	Z_α

Tabla III. Tabla de ji-cuadrado.

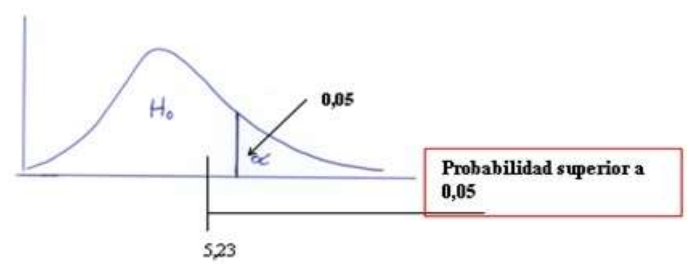


Gráfico 2.

Ji-cuadrado como prueba de bondad de ajuste

También se puede usar el estadístico ji-cuadrado para evaluar cuán buena puede resultar una distribución teórica, cuando pretende representar la distribución real de los datos de una muestra determinada. A esto se le llama **evaluar la bondad de un ajuste**. Probar la bondad de un ajuste es ver en qué medida se ajustan los datos observados a una distribución teórica o esperada.

Tomemos como ejemplo la distribución esperada para los individuos de una población que son clasificados según grupo sanguíneo. Según estudios realizados en población, se espera que dicha distribución, en porcentajes, sea la siguiente:

Grupo	Frecuencia esperada
AB	2,0%
A	30,5%
B	9,3%
0	58,2%

Tabla IV. Ejemplo de distribución esperada.

En una muestra de 150 dadores de sangre se encontró la siguiente distribución:

Grupo	Frecuencia observada
AB	4
A	48
B	15
0	83

Tabla V. Ejemplo de distribución observada.

1. Las hipótesis del problema son:
H0: los datos se ajustan a la distribución teórica.
H1: los datos no se ajustan a la distribución teórica.

2. Siguiendo el esquema general de solución propuesto para las pruebas de hipótesis, ahora corresponde elegir un nivel de significación
Elegimos entonces alfa=0,01. El estadístico de prueba será ji-cuadrado, cuya fórmula es:

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

Debemos calcular las frecuencias esperadas en nuestro grupo. Si aplicamos los porcentajes esperados a la muestra de 150 casos podemos obtener las siguientes frecuencias esperadas (ei):

Grupo	Frec. oi	Frec. ei
AB	4	3,00
A	48	45,75
B	15	13,95
0	83	87,30
Total	150	150,00

Tabla VI. Ejemplo de frecuencias esperadas.

Los grados de libertad de esta tabla se obtienen restando 1 al número de filas, en este caso: gl=4-1=3
Recordemos que la fila del total no se considera para los grados de libertad.

Si ya tenemos las frecuencias observadas y esperadas, podemos proceder a evaluar la diferencia entre ellas utilizando el estadístico ji-cuadrado. Si la diferencia entre frecuencias observadas y esperadas es grande, significará que la hipótesis nula es falsa, o sea, esta distribución no se ajusta a la distribución teórica y si, en cambio, resulta que la diferencia entre frecuencias observadas y esperadas no es muy grande, significará que la hipótesis nula es verdadera; por lo tanto, la distribución en la muestra se ajusta a la distribución teórica y diremos que no hay significación estadística.

El valor del estadístico de prueba ($\mathbf{X}^2$) es una medida de la diferencia entre frecuencias observadas y esperadas; por lo tanto, mientras mayor resulte , más fácil será rechazar la hipótesis nula.

3. Se calcula el estadístico de prueba con los datos del ejemplo

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{(4-3)^2}{3} + \frac{(48-45{,}75)^2}{45{,}75} + \frac{(15-13{,}95)^2}{13{,}95} + \frac{(83-87{,}3)^2}{87{,}3} = 0{,}73$$

$$\chi^2 = 0{,}73$$

4. Se compara este valor con el valor de ji-cuadrado de la tabla
El valor de ji-cuadrado lo buscaremos con alfa=0,01 y 3 grados de libertad. Según tabla, ese valor es 11,34.
Al comparar el valor del estadístico de prueba (0,73) con el valor de tabla (11,34), vemos que 0,73 se encuentra a la izquierda de 11,34 desplazado hacia el centro de la curva y que, por lo tanto, la probabilidad de valores mayores a él es muy superior al nivel de significación alfa=0,01.

5. Conclusión

Dado que la probabilidad de $\chi^2 \geq 0{,}73$ es mayor que alfa, se acepta la hipótesis nula. Esto significa que los datos observados se ajustan a la distribución teórica, por lo tanto las diferencias observadas no son estadísticamente significativas.

6. Gráfico

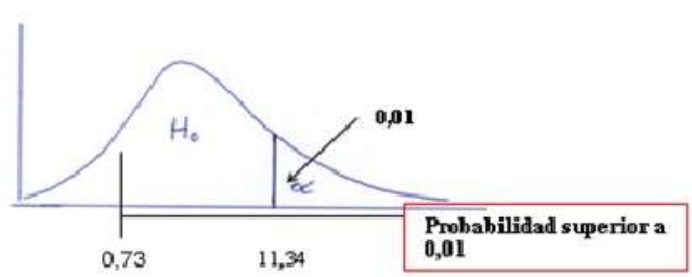


Gráfico 3. Prueba de bondad de ajuste.

Notas

Declaración de conflictos de intereses
El autor declara "No tengo otras relaciones/pertenencias/circunstancias que podrían ser entendidas como un potencial conflicto de interés". El formulario puede ser solicitado contactando al autor responsable.

Los artículos de la Serie "Estadística Aplicada a la Investigación en Salud" provienen del curso *Estadística Aplicada a la Investigación en Salud*.